Les Développements limités

1. Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral ou formule de Taylor-Laplace

Soit I *un ensemble*, $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in I$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b+t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I *un ensemble*, $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in I$ en supposant que $\forall x \in I \; |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Très souvent on prend $M_{n+1} = sup\left|f^{(n+1)}\right|$

Applications :

1. **Obtention d'inégalités** : encadrement d'une fonction par des polynômes.
2. **Limites de suites** : On peut minorer ou majorer une fonction moins un polynôme par une fonction de limite finie.

Formule de Taylor-Young

Soit I un ensemble, $f \in C^n(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, a \in I, \forall x \in I$ alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Lorsque a=0 la formule s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + o((x)^n)$$

Applications :

1. **Calcul de limite** : Principalement lorsque x->0.
2. **Etude locale d'une fonction.**

2. Développement limité

Développement limité en 0 : Généralité

Soit I un ensemble, $f \in C^n(I,\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, a \in I, \forall x \in I$ alors il existe un unique polynôme P de degré n tel que :

$$f(x) = P(x) + o\,(x^n) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}|\varepsilon(x)| = 0$$

Donc **un développement limité est unique.**
Un développement limité de f en 0 à l'ordre n est noté $DL_n(f,0)$ ou $DL_n(0)$.
P(x) est la partie régulière du $DL_n(f,0)$.

Propriété de base de $DL_n(0)$

- Si f est paire, P est un polynôme pair (tous les termes non nuls sont de degré pair).
- Si f est impaire, P est un polynôme impair.

DLn(0) fondamentaux $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-n-1)x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{i}(\alpha-j-1)\,x^i}{i!} + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} + o(x^n)$$

$$e^{\lambda x} = 1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x\lambda)^i}{i!} + o(x^n)$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2i+1}\right)$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n})$$

Calcul de DL

Pour calculer un $DL_n(f,x_0)$ on pose $t = x - x0$ et $g(t) = f(t - x0)$ et on calcule un $DL_n(g,0)$.

F possède un $DL_0(x_0)$ si et seulement si F admet une limite finie en x_0 notée L : $F(x) = L + o(1)$ (si F est continue en x_0, $L = f(x_0)$).

F (définie en x_0) possède un $DL_1(F,x_0)$ si et seulement si F dérivable en x_0.

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \; + o(x - x_0)$$

Opérations sur les développements limités

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec P et Q des polynômes de degré n alors

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + o(x^n)$$

$$(gf)(x) = T(x) + o(x^n)$$

Où T est le polynôme PQ tronqué à l'ordre n.

Soit u définie au voisinage de 0, avec $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, si u admet un $DL_n(0)$ alors la fonction $f = \frac{1}{1+u}$ admet aussi un $DL_n(0)$.

Soient f et g définies au voisinage de 0, ayant un $DL_n(0)$, si $\lim_{x \to 0} g(x) = L\,, L \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.

Intégration des développements limités

Soit $f \in C(I, \mathbb{R}), o \in I$ ayant $DL_n(0)$ de la forme (n≥1) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$ de la forme $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

Dérivation

On ne peut pas toujours dériver le $DL_n(f,0)$ pour obtenir le $DL_{n-1}(f',0)$,car le lien entre DL et dérivées successives n'est pas réciproque. Cependant si **f est de classe C^n sur I** alors la dérivation est possible.