

Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

1. Définitions :

- Soit \mathcal{J} un intervalle de \mathbb{R} , a , b et c trois fonctions de $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$.

On note (\mathcal{H}) $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ l'équation différentielle réelle linéaire du 1^{er} ordre.

Pour mieux comprendre :

Une équation différentielle réelle linéaire du 1^{er} ordre est, par exemple :

$$(\mathcal{H}) \quad xy' + y = e^{-x}$$

Dans ce cas on a : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow x'$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow 1'$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \rightarrow e^{-x}$, donc on peut prendre par exemple $\mathcal{J} = \mathbb{R}$, mais tout intervalle de \mathbb{R} marche aussi, cela dépendra de l'énoncé. Mais quelquefois il faut que vous repérez vous-même l'intervalle de définition des fonctions.

Quoiqu'il en soit il est nécessaire pour pouvoir résoudre (\mathcal{H}) que les fonctions a , b et c soient continues définies sur le même intervalle.

- Soit \mathcal{J} un intervalle de \mathcal{J} et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{J}, \mathbb{K})$, f est solution de (\mathcal{H}) sur \mathcal{J} .

Si et seulement si, quel que soit $x \in \mathcal{J}$, $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$

Pour mieux comprendre :

En mathématiques on aime bien faire des suppositions.

Pour les équations différentielles on cherche leurs solutions.

On va supposer qu'une fonction f correctement définie est solution de l'équation différentielle que l'on traite.

Dans le but de trouver la ou les propriétés que doit vérifier une solution de l'équation.

- Il est évident que si f est solution de (\mathcal{H}) sur \mathcal{J} alors f est aussi solution de (\mathcal{H}) sur tout intervalle $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$

Pour mieux comprendre :

J'espère que comme il est dit plus haut ceci est évident pour vous.

Mais pour être sûr que vous compreniez : si $f(x) = e^{-x}$ est solution sur \mathbb{R} de (\mathcal{H}) $y' = -y$, alors c'est aussi la solution de (\mathcal{H}) sur \mathbb{R}^+ ou sur $[0 ; 1]$...

- On appelle **solution maximale** de (\mathcal{H}) une solution de (\mathcal{H}) sur l'intervalle \mathcal{J} le plus grand possible.

Pour mieux comprendre :

Pour (\mathcal{H}) $y' = -y$, une solution maximal est $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \rightarrow e^{-x}$, par contre la fonction $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \rightarrow e^{-x}$ bien que solution de (\mathcal{H}) n'est pas une solution maximal de (\mathcal{H})
car $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

- **Résoudre (\mathcal{H})** consiste à trouver l'ensemble des solutions maximales.

Pour mieux comprendre :

Restons sur l'équation différentielle (\mathcal{H}) $y' = -y$ comme on l'a vu précédemment
 $f(x) = e^{-x}$ est une solution maximale, en partant de cela on verra comment plus
tard mais résoudre (\mathcal{H}) revient à donner l'ensemble

$(S) = \{\forall k \in \mathbb{R} / f(x) = ke^{-x}\}$.

- Soit $x_0 \in \mathcal{J}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, l'écriture $(\mathcal{C}) \begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ s'appelle le
problème de Cauchy pour (\mathcal{H}) en (x_0, y_0) .

Pour mieux comprendre :

En fait maintenant on impose un cas particulier, c'est-à-dire que l'on cherche
par exemple la ou les fonctions solutions de (\mathcal{H}) $y' = -y$ avec $y(0) = 1$.

- Résoudre (\mathcal{C}) consiste à trouver les solutions maximales
 $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ de (\mathcal{H}) tel que $x_0 \in \mathcal{J}$ et $f(x_0) = y_0$.

2. Méthode de résolution des équations différentielles d'ordre un :

Soit $(\mathcal{H}) : u(x)y' + v(x)y = w(x)$

- **1^{ère} étape :**

On détermine les intervalles sur lesquels la fonction u ne s'annule pas, et sur chacun d'eux, on résout l'équation $(\mathcal{E}) : y' + a(x)y = b(x)$, obtenue en divisant les deux membres de (\mathcal{H}) par $u(x)$.

Dans la suite, a et b sont des fonctions continues sur J .

Pour mieux comprendre :

Cette étape est primordiale car en fait il est beaucoup plus facile de résoudre des équations différentielles de la forme $(\mathcal{E}) : y' + a(x)y = b(x)$ que de cette forme : $(\mathcal{H}) : u(x)y' + v(x)y = w(x)$ donc quand on a cette forme il faut diviser par $u(x)$. Pour cela il faut vérifier que u ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude considéré, si elle s'annule il faut découper l'intervalle en sous-intervalles de manière à supprimer tous les points où u s'annule.

Par exemple si $J = \mathbb{R}$ et u s'annule en 0 on doit alors résoudre sur deux intervalles $J_1 = \mathbb{R}^-$ et $J_2 = \mathbb{R}^+$ l'équation différentielle.

- **2^{ème} étape :**

On résout l'équation homogène (\mathcal{E}_0) sur $J : y' + a(x)y = 0$

Toute solution y_0 de (\mathcal{E}_0) est de la forme $y_0(x) = ke^{-A(x)}$.

Où A est une primitive de a sur J et $k \in \mathbb{R}$ quelconque

$$A(x) = \int a(x) dx$$

- **3^{ème} étape :**

① Si on connaît une solution particulière \hat{y} (constante ou obtenue autrement) Les solutions sont de la forme :

$$x \rightarrow \hat{y}(x) + y_0(x) = \hat{y}(x) + ke^{-A(x)}$$

② Sinon, on applique la méthode de la « variation » de la constante ou méthode de Lagrange : on cherche les solutions de (\mathcal{E}) sous la forme $y(x) = k(x)e^{-A(x)}$. Et par remplacement dans (\mathcal{E}) , on obtient : $k'(x)e^{-A(x)} = b(x)$, d'où $k(x)$ par calcul de primitive sur \mathcal{I} .

$$k(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx$$

Avec une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donnée, on a l'écriture générale :

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + y_0 e^{A(x_0)} \right) e^{-A(x)}$$

3. Remarques et observation :

Remarque 1 : méthode du « physicien »

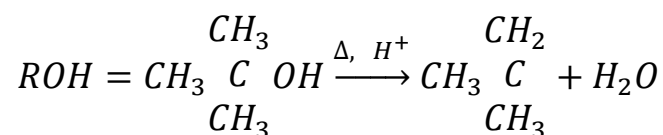
On peut parfaitement résoudre (\mathcal{E}_0) en écrivant $\frac{y'}{y} = -a(x)$ et en intégrant chaque membre, à condition d'utiliser le résultat suivant :

Si y est une solution de (\mathcal{E}_0) sur J , soit y est nulle sur J , soit y est ne s'annule jamais sur J .

Pour mieux comprendre :

Cette méthode est utilisable si on est sûr que y n'est pas la fonction nulle, elle n'est donc pas utilisable à proprement parler en mathématique, mais elle est très utilisée en physique et en chimie, comme par exemple en cinétique chimie, car on sait dans ce cas-là que la solution recherchée est non triviale, c'est-à-dire non nulle.

Exemple en cinétique chimie : E_1



La vitesse de réaction est $v = k[ROH] = -\frac{d[ROH]}{dt}$ ici $y = [ROH]$ et $y' = -\frac{d[ROH]}{dt}$

Et donc en appliquant la **Remarque 1** on a : $\frac{y'}{y} = -k$.

Soit en intégrant entre 0 et t on obtient :

$$\ln\left(\frac{[ROH]}{[ROH]_0}\right) = -kt$$

Avec $[ROH]_0$ la concentration initiale en alcool.

Remarque 2 : lorsque des valeurs absolues apparaissent dans les primitives, il faut essayer dans la mesure du possible de trouver une autre écriture, sans valeur absolue, quitte à changer le signe d'une constante.

Remarque 3 : Attention à bien changer de constante pour la solution de (\mathcal{E}_0) , lorsque l'on passe d'un intervalle à l'autre.

Pour mieux comprendre :

En fait lorsque l'on a découpé J en sous intervalles J , même si sur 2 intervalles J différents on trouve deux solutions qui se ressemblent. Il faut comprendre que même si elles ont la même expression, ce ne sont pas les mêmes fonctions car elles ne sont pas définies sur les mêmes intervalles, c'est pour cela qu'il faut changer les notations des constantes pour bien différencier ces fonctions.

Remarque 4 : La recherche de solutions définies des points M où $u(x)$ s'annule (au bord des intervalles sur lesquels on a effectué la résolution) revient à déterminer

Maths pas à pas

des constantes (si elles existent) pour lesquelles les fonctions admettent des limites à gauche et à droite en M , égales. Ensuite, on vérifie si la dérivabilité en M de la fonction ainsi définie par prolongement est assurée.

Remarque 5 : Toute équation de la forme $u(x)y'' + v(x)y' = w(x)$ est ramenée au cas d'une équation linéaire du 1^{er} ordre.

En posant comme inconnue auxiliaire : $z = y'$